

1999 年第 30 屆國際物理奧林匹亞競賽國家代表隊
準決選資格考試試題

本試題共有計算題六大題，每題 25 分，合計 150 分。

- 一、在一水平光滑的桌面上置有一力常數為 k ，自然長度為 ℓ_0 的輕彈簧。彈簧的一端固定在桌面上，另一端繫住一質量為 m 的小木塊，如圖 1 所示。彈簧可繞固定點自由轉動。起始時，在垂直於彈簧長度的方向上，瞬間輕敲木塊，使木塊獲得初速 v_0 。回答下列各題：

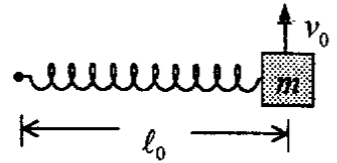


圖 1

- (a) 設小木塊的極坐標為 (r, θ) ， r 稱為徑向坐標，即小木塊和彈簧固定端之間的距離； θ 稱為角坐標，即彈簧從起始方位算起所轉過的角度，寫出小木塊的運動方程式。
- (b) 若彈簧在轉動的過程中，其長度的變化量遠小於其自然長度，試證小木塊在徑向上（即沿彈簧的長度方向）的運動為簡諧運動，並求出其振盪角頻率 ω 、振幅 A 、以及軌跡方程式 $r(t)$ 和 $\theta(t)$ ？
- (c) 欲使小木塊能在徑向上作簡諧運動，則其初速率 v_0 有何限制？

- 二、如圖 2 所示，有一半徑為 R 的載流長直圓柱導體，電流的方向平行於圓柱體的中心軸，且均勻地分布在其橫截面上，其電流密度為 J 。此導體內含有一個半徑為 r 的圓柱形空腔，平行於圓柱導體的中心軸。兩者中心軸之間的距離為 a 。試證明在空腔內的磁場為一均勻的磁場，並求出其大小及方向。

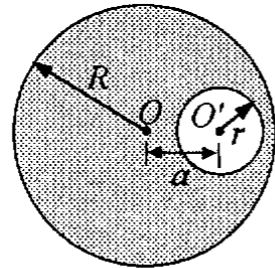


圖 2

- 三、參看圖 3， A 和 B 為兩絕熱容器，內裝有單原子理想氣體。兩容器之間有一閘門 C ，用於控制 A 和 B 之間的氣體流動。 B 容器內有一可自由活動的活塞，活塞上面置放有砝碼。在活塞的上方某處， B 的器壁上有一個穿孔 D 。開始時閘門關閉， A 容器內氣體的體積、溫度、和壓力分別為 20 公升、400 K，和 4 atm； B 內的氣體則為 5 公升、300 K、和 1.2 atm。現將閘門打開，使 A 容器的氣體做絕熱膨脹，當其內的壓力降至 1.2 atm 時，迅速將閘門重新關閉。設容器外的大氣壓力為一大氣壓，回答下列問題：

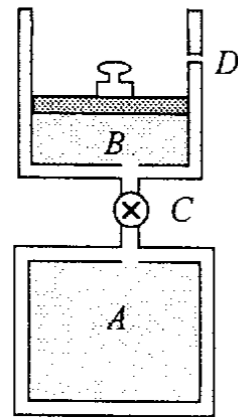


圖 3

- (a) A 容器內的氣體最後剩下多少莫耳？
- (b) 若在達成最後平衡的過程中， B 容器內的活塞衝過 D 孔，以致氣體外洩，則 B 內的氣體在最後平衡時的壓力為何？
- (c) 若設法將 D 孔封死，則 B 內氣體在最後達成平衡時的溫度和體積各為若干？

【註】氣體常數 $R = 0.082 \text{ atm} \cdot \ell / \text{mol} \cdot \text{K}$ 。

- 四、(a)如圖 4a 所示，一置於地面的圓筒形水桶，內裝有深度為 H 的水，今在水面下距離為 y 的桶邊鑿一小洞，使水噴出，則 y 為何值時，可噴出最遠？
 (b)如圖 4b 所示，桶邊鑿開的小洞愈接近水桶底面，則水壓愈強，從洞口噴出的水速就愈快。今欲使愈接近桶底面的洞口所噴出的水，噴得愈遠，則至少應將水桶提離地面多高？

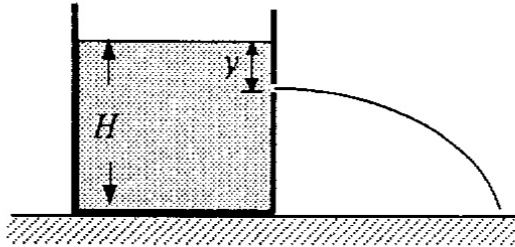


圖 4a

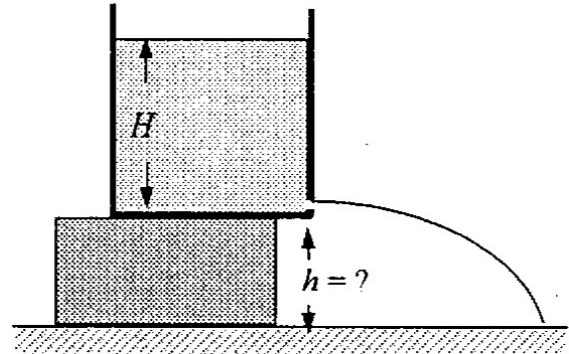


圖 4b

- 五、圖 5 所示為一玻璃製的平凸透鏡，已知玻璃的折射率為 1.5，凸邊所對應的球面曲率半徑 $R = 10\text{cm}$ ，透鏡中央的厚度設為 D 。現以單色平行光沿主軸方向，由平邊入射透鏡，由於球面像差的緣故，透射出去的光線不會全部焦聚在一點。當我們把垂直於主軸的光屏沿著主軸移動時，在一段範圍內都會有看似聚焦的光點，出現在光屏上。不考慮光線在透鏡內部的重複反射，回答下列問題：

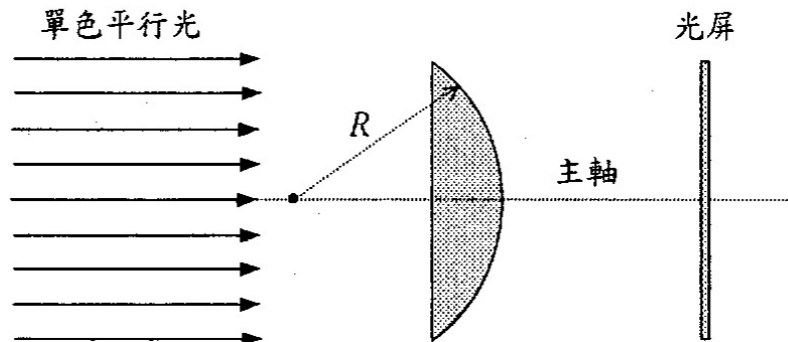


圖 5

- (a)當 $D = 2\text{cm}$ 時，在光屏上可看到聚焦光點的範圍有多長？當光屏置於此聚焦範圍內，離鏡最遠的位置時，光屏上所顯示之光點的直徑為何？
 (b)當 $D = 4\text{cm}$ 時，在光屏上可看到聚焦光點的範圍有多長？當 $D = 5\text{cm}$ 時，此範圍又是多長？
 (c)若透鏡中央的厚度很薄，即 $D \ll R$ ，則在光屏上所看到的聚焦光點的位置，離鏡心有多遠？
- 六、有一種類似氫的原子，在原子核的周圍有兩個電子環繞著它轉動。假設這兩個電子都在同一圓周軌道上運行，並且由於電子間的排斥力，使該二電子相對地維持在一直徑的兩端點上，如圖6所示。設原子核的電量為 Ze ($Z > 2$)，試利用波耳原子模型，計算下列各項：
- (a)原子的能階；

- (b) 電子的軌道半徑；
 (c) 原子的磁矩(不計原子核的貢獻)；
 (d) 若 $Z=4$ ，則將兩電子之一游離，需要多少能量(以 eV 表示之)？

【註】 電子質量	$m_e = 9.11 \times 10^{-31} \text{ kg}$ ，
電子電量	$e = 1.60 \times 10^{-19} \text{ C}$ ，
卜朗克常數	$\hbar = 1.05 \times 10^{-34} \text{ Js}$ ，
真空介電係數	$\epsilon_0 = 8.85 \times 10^{-12} \text{ C}^2 \text{ N}^{-1} \text{ m}^{-2}$ 。

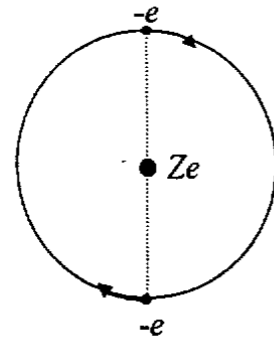


圖 6